Nom en lettres majuscules	Prénom en lettres majuscules	Numéro de dossier

Introduction à l'algèbre linéaire (MAT-1200)
Examen partiel 2 du 27 avril 2018

18h30 à 21h20

- Durée de l'examen: 2h50.
- Inscrivez vos nom, prénom, numéro de dossier aux endroits indiqués ci dessus.
- **Ce sujet comporte 7 questions sur 12 pages + deux feuilles de brouillon.**
- On n'utilisera que le recto des pages 2 à 12 pour traiter les questions.
- Si vous manquez de places, utiliser le verso.
- Les deux dernières feuilles sont pour faire un brouillon. Vous les détachez du cahier de l'examen. Inscrivez votre non sur chacune des feuilles. **Il faut les rendre à la fin de l'examen.**
- Documents admis: deux feuilles manuscrites 8 1/2 $\times$ 11, recto-verso.
- Seulement les calculatrices autorisées.
- Aucune sortie n'est autorisée pendant l'examen.

Question 1:	/20
Question 2:	/16
Question 3:	/10
Question 4:	/18
Question 5:	/14
Question 6:	/12
Question 7:	/10

TOTAL: /100

Question 1. (20 points)

Répondre par vrai ou faux à chacun des énoncés suivants. Justifier brièvement.

a) Si A est une matrice 6×6 pour laquelle $(1,1,1,1,1,1)^t$ est un vecteur du noyau de A alors $\text{dét}(A) = 0$. **Vrai** **Faux**.

b) Soit B une matrice triangulaire de type 10×10 dont la diagonale est formée des nombres $1,2,3,1,4,5,3,5,6,5$. Alors le polynôme caractéristique de B est

$$P(\alpha) = (\alpha-1)^2(\alpha-2)^2(\alpha-3)^2(\alpha-4)(\alpha-5)^3(\alpha-6).$$

Vrai **Faux**.

c) Si θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (1,2,0,-1)^t$ et $\vec{v} = (-2,3,1,0)^t$, alors $\cos\theta = \frac{1}{2}$. **Vrai** **Faux**.

d) Le problème de moindres carrés avec les données

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

admet une solution unique. **Vrai** **Faux**.

e) On considère l'application définie par

$$\begin{array}{rrcl} T \ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On affirme que T est linéaire. **Vrai** **Faux**.

Question 2. (16 points)

Justifier toutes les réponses.

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les points $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,-1)$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et le triangle OBA. On note $\mathcal{C} = \left\{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer la matrice M de la rotation $\mathcal{R}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point $O(0,0)$ dans le sens anti-horaire.

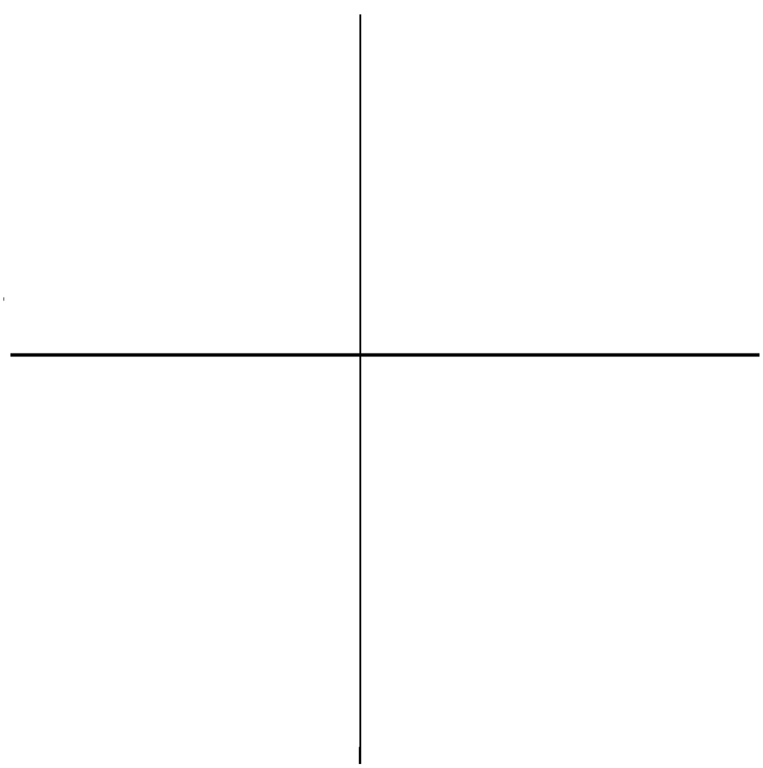
2) Déterminer la matrice N de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe des abscisses OX (c'est à dire la droite $y = 0$).

3) On considère la transformation géométrique $\mathcal{T}$ obtenue en tournant de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine dans le sens anti-horaire suivie de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = 0$. Déterminer la matrice de $\mathcal{T}$.

4) Sur le graphe à la page 4, faites une représentation graphique du triangle OBA et de son image par la transformation $\mathcal{T}$. On prendra pour unité sur chacun des axes $2cm$. On indiquera clairement l'image du triangle sur le graphe.

(Suite de la solution Question 2)

Réponse de 4)



Question 3. (10 points)

Justifier toutes les réponses.

On désigne par A la matrice 4×7 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 20 & -12 & 16 & 20 & 6 \\ -1 & -4 & -1 & -\frac{3}{4} & 12 & -3 & 6 \\ 2 & 8 & 3 & \frac{3}{4} & -9 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

et par A_e une de ses formes échelon

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -12 & 10 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{115}{8} & -\frac{25}{8} & \frac{63}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Quelle est la dimension du noyau de A?

b) Quelle est la dimension de l'espace colonne de A? Donner une base de l'espace colonne de A?

c) Peut-on affirmer que A est la matrice représentative d'une transformation de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^7$? Si oui, pourquoi? Si non pourquoi?

Exercice 4. (18 points)

Justifier toutes les réponses.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_1 = (-1, 1, 0)^t$ est un vecteur propre de la matrice A. Calculer la valeur propre α_1 correspondante au vecteur $\vec{u}_1$.

b) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_2 = (3, 3, 2)^t$ est un vecteur propre de la matrice A. Calculer la valeur propre α_2 correspondante au vecteur $\vec{u}_2$.

c) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(X) = X - X^3$.

d) Quelle est la troisième valeur propre α_3 de A?

e) Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres α_1, α_2 et α_3.

f) La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Ne pas évaluer P^{-1}.

g) Pourquoi la matrice A^{2019} est égale à A?

(Suite de la solution Question 4)

Question 5. (14 points)

Justifier toutes les réponses.

Soient $\mathcal{C} = \left\{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,3), \vec{e}_2 = (2,5)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

1) Donner la matrice de passage P_1 de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

2) Donner la matrice de passage P_2 de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

3) Lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique $\mathcal{C}$, on considère la transformation linéaire définie par

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & \vec{u} = (x,y) & \longmapsto & (3y, 2x - y)\,. \end{array}$$

   a) On munit les espaces de départ et d'arrivée de la base $\mathcal{C}$. Donner alors la matrice M de T.

   b) On munit les espaces de départ et d'arrivée de la base $\mathcal{B}$. Donner alors la matrice N de T.

(Suite de la solution Question 5)

Question 6. (12 points)

Justifier toutes les réponses.

Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,1,1,1),\ \overrightarrow{v}_2 = (1,1,2,4),\ \overrightarrow{v}_3 = (1,2,-4,-3),$$

a) En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, trouvez une base $\mathcal{B}$ orthogonale de E. **On donnera les vecteurs de $\mathcal{B}$ sans fractions**.

b) En déduire une base orthonormée de E.

(Suite de la solution Question 6)

Question 7. (10 points)

Justifier toutes les réponses.

On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de la matrice C. La matrice C est-elle inversible?

b) On considère une matrice A de type 5×5 telle que $\text{dét}(C^2 A C^{-1}) = 2$. Déterminer le déterminant de A.

Feuille pour brouillon

Nom: ______________________________ **No de dossier**: ________________________

Prénom: ______________________________

Feuille pour brouillon

Nom: ______________________________ **No de dossier**: ______________________________

Prénom: ______________________________